Lah. Ghaleb + Lah. Mohamed — Lycée El Alia — 2019-2020

Exercice 1 (6 points)

Dans la figure de la page annexe, on suppose que le plan orienté dans le sens direct et que ABCD est un losange tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA], [BD].
On note Δ et Δ' les médiatrices respectives de [AB] et [CD].

1. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et D en C.
   b) Prouver que f n'est pas une symétrie orthogonale.
2. Soit S la symétrie orthogonale d'axe Δ et R la rotation de centre B et d'angle $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
   a) Montrer que $f = R \circ S$.
   b) Déterminer $f(B)$.
   c) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
3. Soit S' la symétrie orthogonale d'axe Δ' et $g = f \circ S'$.
   Déterminer $g(C)$ et montrer que g est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
4. On pose $\varphi = g^{-1} \circ R$.
   a) Montrer que φ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b) La droite (BC) coupe Δ en un point M. On pose $N = R^{-1}(M)$ et $Q = g^{-1}(M)$.
   Montrer que les points M, N et Q sont alignés.

Exercice 2 (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 + 4z + 8 = 0$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E') : z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.
   a) Vérifier que 2 est une solution de (E').
   b) En déduire les solutions de (E') sous forme algébriques.
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_D = -2 + 2i$.
   Déterminer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
4. Soit E l'image du point C par la rotation du centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Déterminer les affixes z_E et z_F des points E et F.
   b) Montrer que le triangle AEF est rectangle et isocèle en A.
   c) Placer sur le repère les points A, B, C, D, E et F.
5. Soit f antidéplacement tel que $f(A) = E$ et $f(F) = A$.
   Montrer que f est une symétrie glissante. Préciser son vecteur $\overrightarrow{w}$ et construire son axe Δ.

Exercice 3 *(4 points)*

Dans la page annexe ci-jointe, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g continue sur $[-2;2]$ et dérivable sur $]-2;2[$.

1. a) Déterminer, par lecture graphique : $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{g(x)-2}{x-2}$, $g'(-\sqrt{2})$ et $g'(\sqrt{2})$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g\left(-\sqrt{2}-\sin x\right)}{x}$.

2. Soit h la restriction de g à l'intervalle $\left[-2;\sqrt{2}\right]$

   a) Justifier, à laide du graphique, que h réalise une bijection de $\left[-2;\sqrt{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera

   b) Construire, soigneusement, sur l'annexe, la courbe Γ de h^{-1}

   c) Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$.

   d) Etudier la dérivabilité de h^{-1} en 2.

3. On suppose que g est la dérivée d'une fonction f. Par lecture graphique :

   a) Donner les variations de f.

   b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

Exercice 4 *(6 points)*

Soit la fonction f définie sur $[0,\pi[$ par $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[0,\pi[$.
2. Déterminer $g(0)$, $g(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\geqslant 0$, on a : $g'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$.
4. Soit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ h(0)=\pi \end{cases}$

   a) Montrer que h est continue à droite en 0.

   b) Montrer que h est dérivable sur $]0,\pi[$ et que $h'(x)=-\dfrac{2}{1+x^2}$

   c) Montrer que pour tout $x>0$, il existe $c\in\,]0,x[$ tel que : $\dfrac{h(x)-\pi}{x}=\dfrac{-2}{1+c^2}$

   d) Montrer alors que h est dérivable à droite en 0.

5. a) Montrer que pour tout $x>0$; on a : $h(x)=\pi-g(x)$

   b) En déduire que la courbe de h est l'image de la courbe de f par une isométrie que l'on caractérisera.

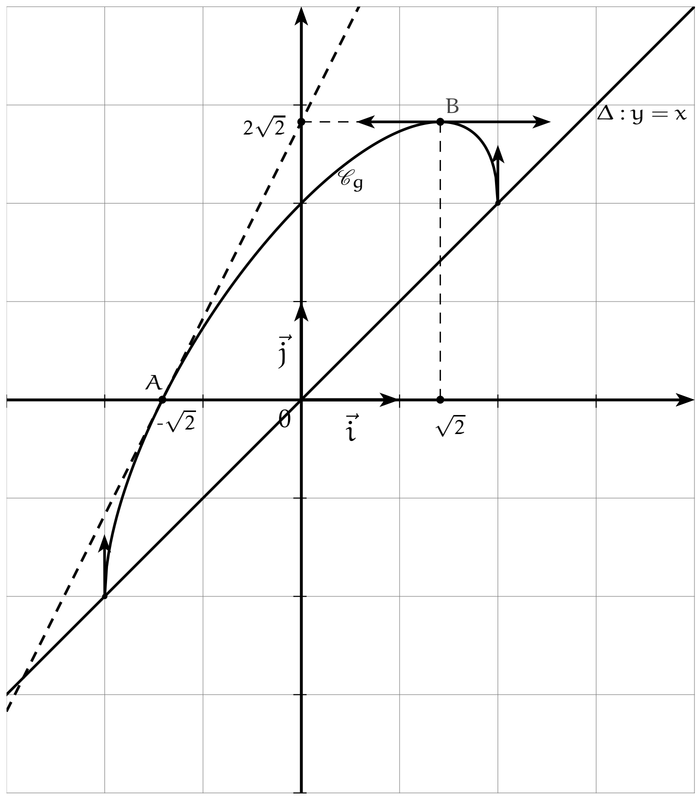
6. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2}$

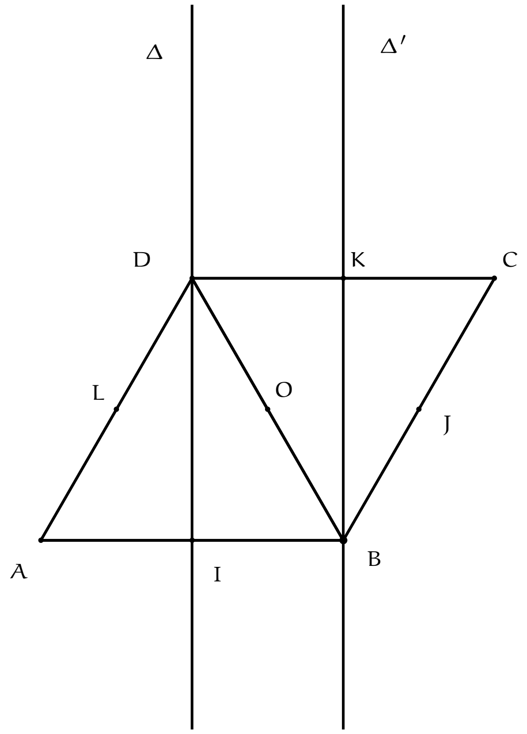
   a) Montrer, à l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis, que :
   $$\text{pour tout } k\in\mathbb{N} : \quad \frac{2}{1+(1+k)^2}\leqslant g(k+1)-g(k)\leqslant\frac{2}{1+k^2}$$

   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{1}{2}g(n)+\dfrac{1}{n^2+1}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{1}{2}g(n)+1$.

   c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Annexe à rendre avec la copie





Bon travail